

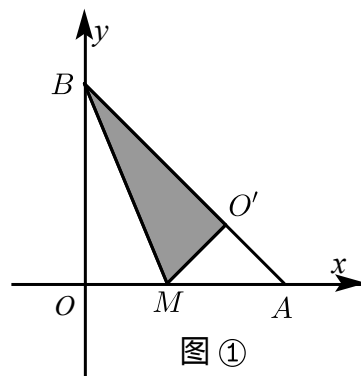
## 第2讲几何变换之对称

### 1. 坐标问题

#### 典题精炼

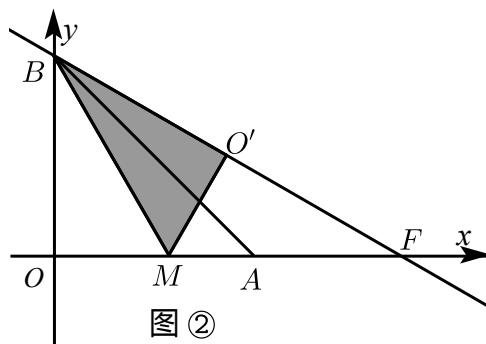
1. 将一个直角三角形纸片 $ABO$ ，放置在平面直角坐标系中，点 $A(2,0)$ ，点 $B(0,2)$ ，点 $O(0,0)$ ．点 $M$ 为边 $OA$ 上的一个动点（点 $M$ 不与点 $O$ ， $A$ 重合），沿着 $BM$ 折叠该纸片，得顶点 $O$ 的对应点 $O'$ ．

（1）如图①，当点 $O'$ 在边 $AB$ 上时，求点 $O'$ 的坐标．



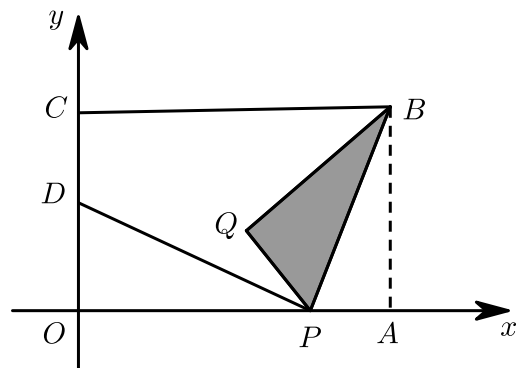
（2）设直线 $BO'$ 与 $x$ 轴相交于点 $F$ ．

① 如图②，当 $BA$ 平分 $\angle MBF$ 时，求点 $F$ 的坐标．



② 当 $OM = \frac{3}{2}$ 时，求点 $F$ 的坐标．（直接写出结果即可）

2. 如图，在直角坐标系中，四边形  $OABC$  为矩形，点  $A, C$  在  $x$  轴和  $y$  轴上，点  $B(5, 3)$  .  $P$  是边  $OA$  上的一动点，将  $\triangle PAB$  沿直线  $BP$  折叠，点  $A$  的落点为  $Q$ ，过点  $P$  作  $\angle OPQ$  的平分线交  $OC$  于点  $D$ ，设  $OD = m$ ， $OP = n$  ( $0 < n < 5$ ) .

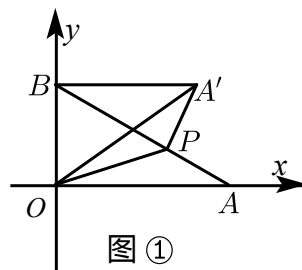


- ( 1 ) 求  $\angle BPD$  的度数 .
- ( 2 ) 求  $m$  与  $n$  的函数关系式 .
- ( 3 ) 当  $CQ = 4$  时 .
  - ① 求  $m$  的值 .
  - ② 求点  $Q$  的坐标 ( 直接写出结果即可 ) .

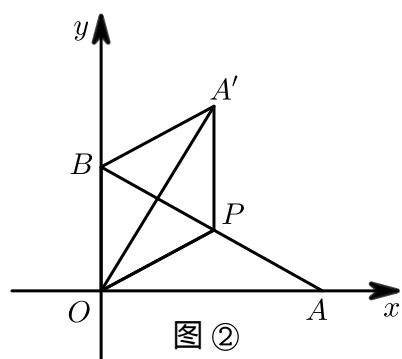
 经典再现

3. 将一个直角三角形纸片 $ABO$ 放置在平面直角坐标系中, 点 $A(\sqrt{3}, 0)$ , 点 $B(0, 1)$ , 点 $O(0, 0)$ ,  $P$ 是边 $AB$ 上的一点(点 $P$ 不与点 $A, B$ 重合), 沿着 $OP$ 折叠该纸片, 得点 $A$ 的对应点 $A'$ .

(1) 如图①, 当点 $A'$ 在第一象限, 且满足 $A'B \perp OB$ 时, 求点 $A'$ 的坐标.



(2) 如图②, 当 $P$ 为 $AB$ 中点时, 求 $A'B$ 的长.



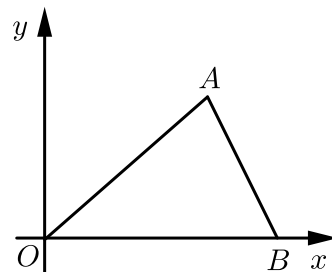
(3) 当 $\angle BPA' = 30^\circ$ 时, 求点 $P$ 的坐标(直接写出结果即可).

## 2. 线段问题

### 典题精炼

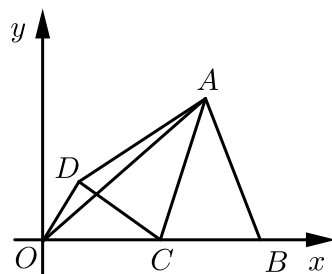
4. 把三角形纸片 $OAB$ 放置在平面直角坐标系中，点 $A(\frac{16}{5}, \frac{12}{5})$ ，点 $B$ 在 $x$ 轴的正半轴上，且 $OB = 5$ 。

(1) 如图①，求 $OA$ ， $AB$ 的长及点 $B$ 的坐标。



图①

(2) 如图②，点 $C$ 是 $OB$ 的中点，将 $\triangle ABC$ 沿 $AC$ 翻折得到 $\triangle ADC$ 。



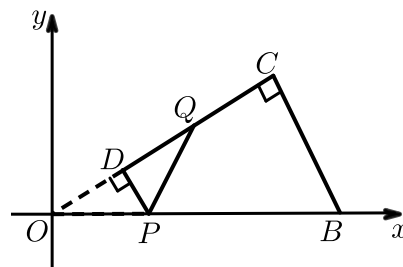
图②

- ① 求四边形 $ADCB$ 的面积。
- ② 求证： $\triangle ABC$ 是等腰三角形。
- ③ 求 $OD$ 的长（直接写出结果即可）。

### 3. 重叠部分面积

#### 典题精炼

5. 如图，将三角形纸片 $OBC$ 放在平面直角坐标系中， $\angle OCB = 90^\circ$ ， $\angle COB = 30^\circ$ ， $OB = 4\text{cm}$ ，点 $B$ 在 $x$ 轴的正半轴上，点 $P(t, 0)$ 是边 $OB$ 上的一个动点（点 $P$ 不与点 $O$ 、 $B$ 重合），过点 $P$ 作 $PD \perp OC$ 于点 $D$ ，沿 $DP$ 折叠该纸片，使点 $O$ 落在射线 $DC$ 上的 $Q$ 点处。



- (1) 用含 $t$ 的代数式表示线段 $CD$ 的长。
- (2) 当点 $Q$ 与点 $C$ 重合时，求 $t$ 的值。
- (3) 设 $\triangle PDQ$ 与四边形 $DPBC$ 重叠部分的图形的面积为 $S$ ，求 $S$ 与 $t$ 之间的函数关系式。

 经典再现

6. 将一个直角三角形纸片 $ABO$ ，放置在平面直角坐标系中，点 $A(\sqrt{3}, 0)$ ，点 $B(0, 1)$ ，点 $O(0, 0)$ ．过边 $OA$ 上的动点 $M$ （点 $M$ 不与点 $O$ ， $A$ 重合）作 $MN \perp AB$ 于点 $N$ ，沿着 $MN$ 折叠该纸片，得顶点 $A$ 的对应点 $A'$ ．设 $OM = m$ ，折叠后的 $\triangle A'MN$ 与四边形 $OMNB$ 重叠部分的面积为 $S$ ．
- (1) 如图1，当点 $A'$ 与顶点 $B$ 重合时，求点 $M$ 的坐标．

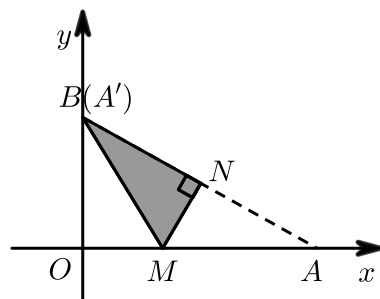


图 1

- (2) 如图2，当点 $A'$ 落在第二象限时， $A'M$ 与 $OB$ 相交于点 $C$ ，试用含 $m$ 的式子表示 $S$ ．

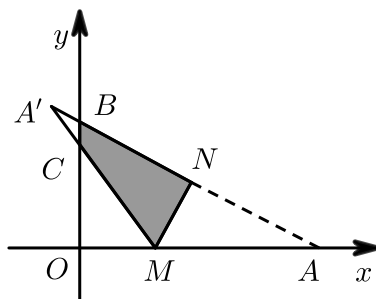
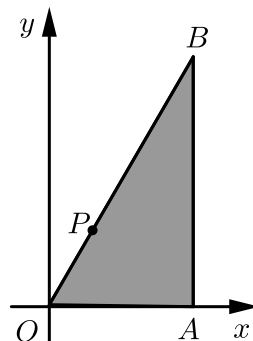


图 2

- (3) 当 $S = \frac{\sqrt{3}}{24}$ 时，求点 $M$ 的坐标（直接写出结果即可）．

7. 将一个直角三角形纸片 $OAB$ 放置在平面直角坐标系中，点 $O(0,0)$ ，点 $A(2,0)$ ，点 $B$ 在第一象限， $\angle OAB = 90^\circ$ ， $\angle B = 30^\circ$ ，点 $P$ 在边 $OB$ 上（点 $P$ 不与点 $O$ ， $B$ 重合）。

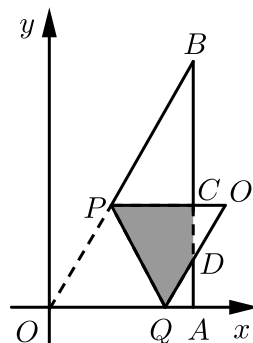
(1) 如图①，当 $OP = 1$ 时，求点 $P$ 的坐标。



图①

(2) 折叠该纸片，使折痕所在的直线经过点 $P$ ，并与 $x$ 轴的正半轴相交于点 $Q$ ，且 $OQ = OP$ ，点 $O$ 的对应点为 $O'$ ，设 $OP = t$ 。

- ① 如图②，若折叠后 $\triangle O'PQ$ 与 $\triangle OAB$ 重叠部分为四边形， $O'P$ ， $O'Q$ 分别与边 $AB$ 相交于点 $C$ ， $D$ ，试用含有 $t$ 的式子表示 $O'D$ 的长，并直接写出 $t$ 的取值范围。



图②

- ② 若折叠后 $\triangle O'PQ$ 与 $\triangle OAB$ 重叠部分的面积为 $S$ ，当 $1 \leq t \leq 3$ 时，求 $S$ 的取值范围（直接写出结果即可）。

## 4. 落点问题

### 典题精炼1

8. 将一个直角三角形纸片 $ABO$ 放置在平面直角坐标系中，点 $A(3,0)$ ，点 $B(0,4)$ ，点 $O(0,0)$ ． $P$ 是边 $AB$ 上的一点（点 $P$ 不与点 $A, B$ 重合），沿着 $OP$ 折叠该纸片，得点 $B$ 的对应点 $B'$ ．

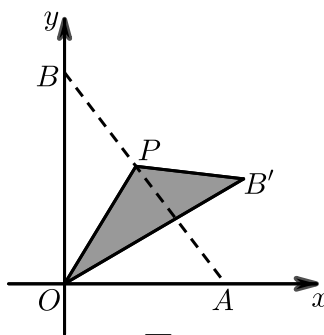


图 ①

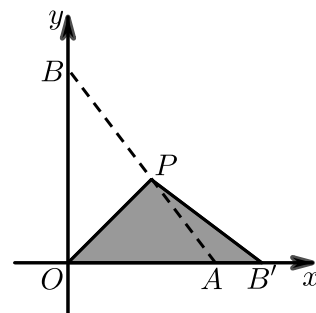
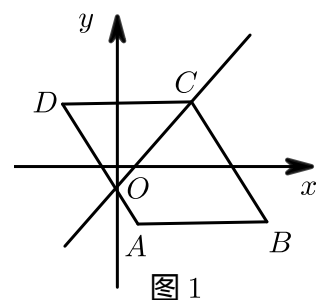


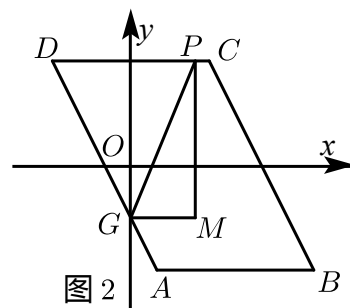
图 ②

- ( 1 ) 如图①，当 $\angle BOP = 30^\circ$ 时，求点 $B'$ 的坐标．
- ( 2 ) 如图②，当点 $B'$ 落在 $x$ 轴上时，求点 $P$ 的坐标．
- ( 3 ) 当 $PB'$ 与坐标轴平行时，求点 $B'$ 的坐标（直接写出结果即可）．

9. 如图 1, 已知平行四边形  $ABCD$ ,  $AB \parallel x$  轴,  $AB = 6$ , 点  $A$  的坐标为  $(1, -4)$ , 点  $D$  的坐标为  $(-3, 4)$ , 点  $B$  在第四象限, 点  $P$  是平行四边形  $ABCD$  边上的一个动点.

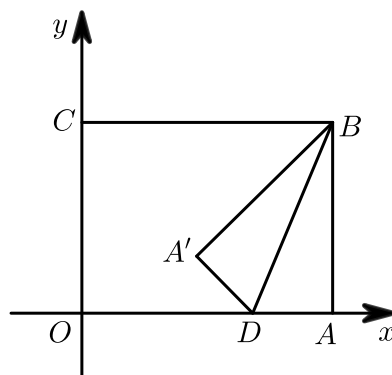


- (1) 若点  $P$  在边  $BC$  上,  $PD = CD$ , 求点  $P$  的坐标.
- (2) 若点  $P$  在  $AB$ ,  $AD$  上, 点  $P$  关于坐标轴对称的点  $Q$  落在直线  $y = x - 1$  上, 求点  $P$  的坐标.
- (3) 若点  $P$  在  $CD$  上, 点  $G$  是  $AD$  与  $y$  轴的交点, 如图 2, 过点  $P$  作  $y$  轴的平行线  $PM$ , 过点  $G$  作  $x$  轴的平行线  $GM$ , 它们相交于点  $M$ , 将  $\triangle PGM$  沿直线  $PG$  翻折, 求点  $M$  的对应点落在坐标轴上时, 求点  $P$  的坐标. (直接写出答案)



 典题精炼2

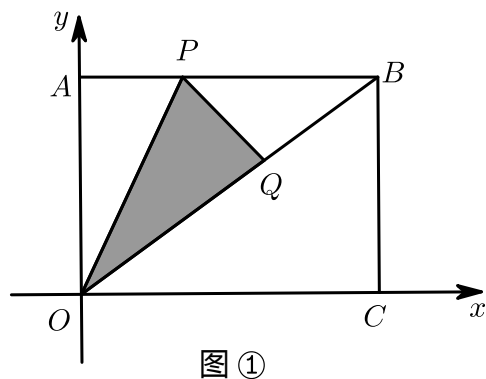
10. 如图，将矩形 $OABC$ 放在平面直角坐标系中， $O$ 为原点，点 $A$ 在 $x$ 轴的正半轴上， $B(8,6)$ ，点 $D$ 是射线 $AO$ 上的一点，把 $\triangle BAD$ 沿直线 $BD$ 折叠，点 $A$ 的对应点为 $A'$ 。



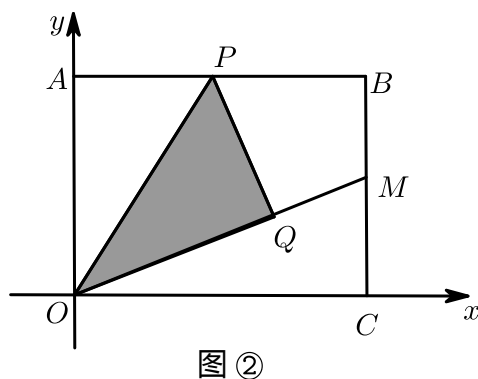
- ( 1 ) 若点 $A'$ 落在矩形的对角线 $OB$ 上时， $OA'$ 的长= \_\_\_\_\_ ．
- ( 2 ) 若点 $A'$ 落在边 $AB$ 的垂直平分线上时，求点 $D$ 的坐标．
- ( 3 ) 若点 $A'$ 落在边 $AO$ 的垂直平分线上时，求点 $D$ 的坐标．( 直接写出结果即可 )

11. 将矩形纸片  $OABC$  放在平面直角坐标系中， $O$  为坐标原点，点  $A$  在  $y$  轴上，点  $C$  在  $x$  轴上，点  $B$  的坐标是  $(8, 6)$ ，点  $P$  是边  $AB$  上的一个动点，将  $\triangle ABO$  沿  $OP$  折叠，使点  $A$  落在点  $Q$  处。

(1) 如图①，当点  $Q$  恰好落在  $OB$  上时，求点  $P$  的坐标。



(2) 如图②，当点  $P$  是  $AB$  中点时，直线  $OQ$  交  $BC$  于  $M$  点。



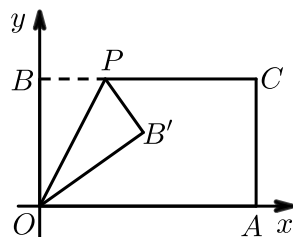
① 求证： $MB = MQ$ 。

② 求点  $Q$  的坐标。

典题精炼3

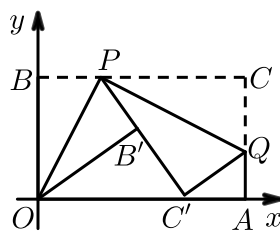
12. 已知一个矩形纸片 $OACB$ ，将该纸片放置在平面直角坐标系中，点 $A(11,0)$ ， $B(0,6)$ ，点 $P$ 为 $BC$ 上的动点（点 $P$ 不与点 $B$ ， $C$ 重合），经过点 $O$ ， $P$ 折叠该纸片，得点 $B'$ 和折痕 $OP$ ，设 $BP = t$ 。

(1) 如图①，当 $\angle BOP = 30^\circ$ 时，求点 $P$ 的坐标。



图①

(2) 如图②，经过点 $P$ 再次折叠纸片，使点 $C$ 落在直线 $PB'$ 上，得点 $C'$ 和折痕 $PQ$ ，若 $AQ = m$ ，求 $m$ 关于 $t$ 的函数解析式。

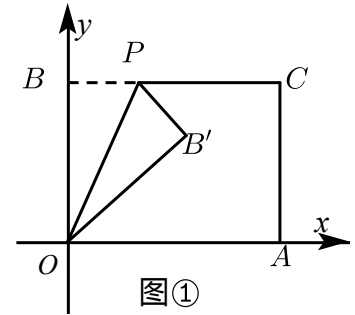


图②

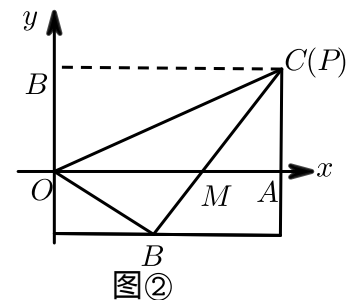
(3) 在(2)的条件下，当点 $C'$ 恰好落在 $OA$ 上时，求点 $P$ 的坐标（直接写出结果即可）。

13. 已知一个矩形纸片 $OACB$ ，将该纸片放置在平面直角坐标系中，点 $A(11,0)$ ，点 $B(0,6)$ ，点 $P$ 为 $BC$ 边上的动点．

- ( 1 ) 如图①，经过点 $O$ 、 $P$ 折叠该纸片，得点 $B'$ 和折痕 $OP$ ，当点 $P$ 的坐标为 $(2\sqrt{3}, 6)$ 时，求 $\angle BOP$ 的度数．



- ( 2 ) 如图②，当点 $P$ 与点 $C$ 重合时，经过点 $O$ 、 $P$ 折叠纸片，使点 $B$ 落在点 $B'$ 的位置， $B'C$ 与 $OA$ 交于点 $M$ ，求点 $M$ 的坐标．

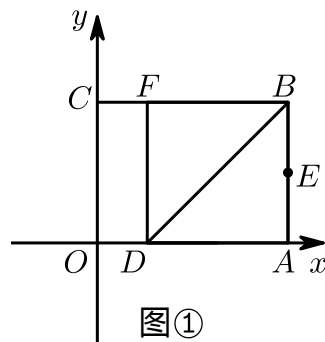


- ( 3 ) 过点 $P$ 作直线 $PQ$ ，交 $OA$ 于点 $Q$ ，再取 $BO$ 中点 $T$ ， $AC$ 中点 $N$ ，分别以 $TP$ ， $PN$ ， $NQ$ ， $QT$ 为折痕，依次折叠该纸片，折叠后点 $O$ 的对应点与点 $B$ 的对应点恰好重合，且落在线段 $PQ$ 上， $A$ 、 $C$ 的对应点也恰好重合，也落在线段 $PQ$ 上，求此时点 $P$ 的坐标（直接写出结果即可）．

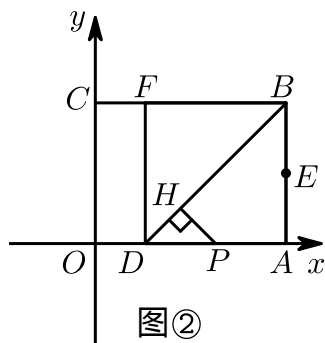
## 5. 线段和差最值

### 典题精炼

14. 如图①，将一个矩形纸片 $OABC$ 放置在平面直角坐标系中，点 $A$ 的坐标是 $(3,0)$ ，点 $C$ 的坐标是 $(0,2)$ ，点 $O$ 的坐标是 $(0,0)$ ．点 $E$ 是 $AB$ 的中点，在 $OA$ 上取一点 $D$ ，将 $\triangle BDA$ 沿 $BD$ 翻折，使点 $A$ 落在 $BC$ 边上的点 $F$ 处．

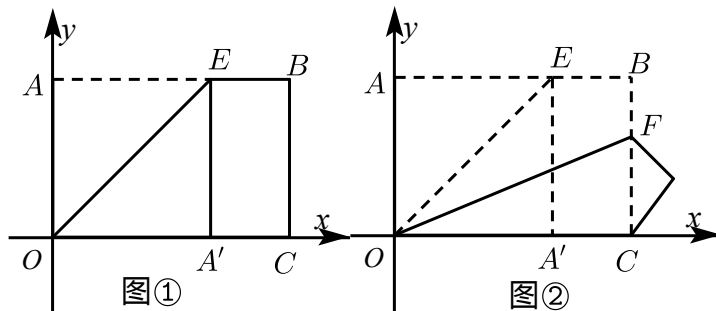


- (1) 求点 $E$ 、 $F$ 的坐标．
- (2) 如图②，若点 $P$ 是线段 $DA$ 上的一个动点（点 $P$ 不与点 $D$ 、 $A$ 重合），过点 $P$ 作 $PH \perp DB$ 于 $H$ ，设 $OP$ 的长为 $x$ ， $\triangle DPH$ 的面积为 $S$ ，试用关于 $x$ 的代数式表示 $S$ ．

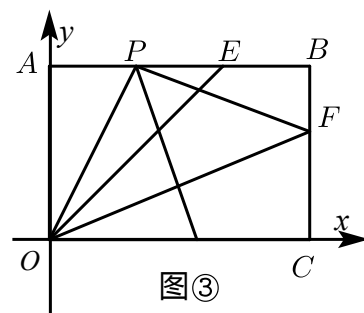


- (3) 在 $x$ 轴、 $y$ 轴上分别存在点 $M$ 、 $N$ ，使得四边形 $MNFE$ 的周长最小，请直接写出四边形 $MNFE$ 的周长最小值．

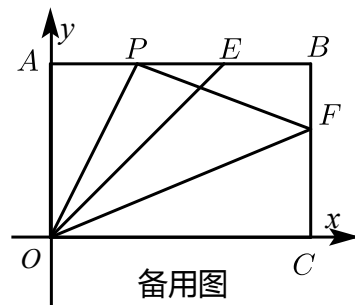
15. 将一个矩形纸片  $OABC$  放置在平面直角坐标系中，点  $O(0,0)$ ，点  $A(0,2)$ ，点  $E, F$  分别在边  $AB, BC$  上．沿着  $OE$  折叠该纸片，使得点  $A$  落在  $OC$  边上，对应点为  $A'$ ，如图①．再沿  $OF$  折叠，这时点  $E$  恰好与点  $C$  重合，如图②．



- (1) 求点  $C$  的坐标．
- (2) 将该矩形纸片展开，再折叠该矩形纸片，使点  $O$  与点  $F$  重合，折痕与  $AB$  相交于点  $P$ ，展开矩形纸片，如图③．



- ① 求  $\angle OPF$  的大小．
- ② 点  $M, N$  分别为  $OF, OE$  上的动点，当  $PM + MN$  取得最小值时，求点  $N$  的坐标（直接写出结果即可）．

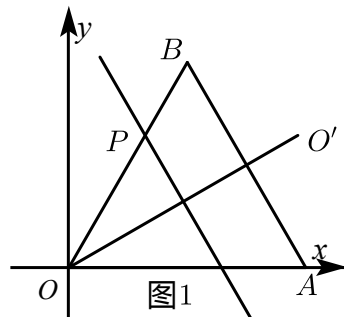


## 6. 找隐圆

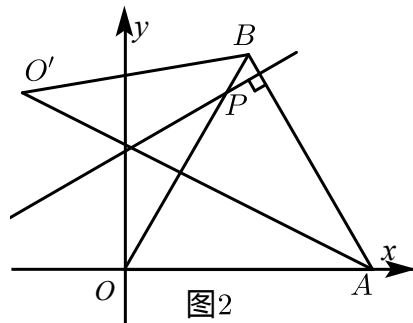
### 典题精炼

16. 平面直角坐标系中， $\triangle OAB$ 是等边三角形，点 $O(0,0)$ ，点 $A(8,0)$ ，点 $P$ 是 $OB$ 边上的一个动点（与点 $A$ 、 $B$ 不重合）. 直线 $l$ 是经过点 $P$ 的一条直线，把 $\triangle OAB$ 沿直线 $l$ 折叠，点 $O$ 的对应点是 $O'$ .

(1) 如图1，当 $OP = 5$ 时，若直线 $l \parallel AB$ ，求点 $O'$ 的坐标.



(2) 如图2，当点 $P$ 在 $OB$ 边上运动时，若 $l \perp AB$ ，求 $\triangle ABO'$ 的面积.

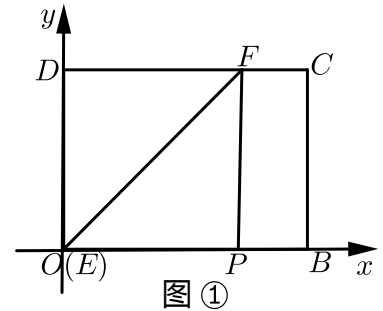


(3) 当 $OP = 6$ 时，在直线 $l$ 变化过程中，求 $\triangle ABO'$ 面积的最大值（直接写出结果即可）.

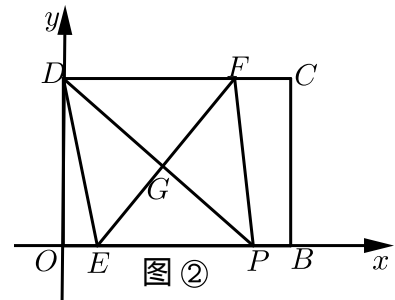
17. 已知矩形纸片 $OBCD$ 的边 $OB$ 在 $x$ 轴上， $OD$ 在 $y$ 轴上，点 $C$ 在第一象限，且 $OB = 8$ ， $OD = 6$ ．现将纸片折叠，折痕为 $EF$ (点 $E$ ， $F$ 是折痕与矩形的边的交点)，点 $P$ 为点 $D$ 的对应点，再将纸片还原．

( 1 ) 若点 $P$ 落在矩形 $OBCD$ 的边 $OB$ 上，

① 如图①，当点 $E$ 与点 $O$ 重合时，求点 $F$ 的坐标．



② 如图②，当点 $E$ 在 $OB$ 上，点 $F$ 在 $DC$ 上时， $EF$ 与 $DP$ 交于点 $G$ ，若 $OP = 7$ ，求点 $F$ 的坐标．



( 2 ) 若点 $P$ 落在矩形 $OBCD$ 的内部，且点 $E$ ， $F$ 分别在边 $OD$ ，边 $DC$ 上，当 $OP$ 取最小值时，求点 $P$ 的坐标 ( 直接写出结果即可 )

## 7. 存在性问题

### 典题精炼

18. 如图，在平面直角坐标系中，四边形 $OABC$ 是矩形，点 $O(0,0)$ ，点 $A(3,0)$ ，点 $C(0,4)$ ； $D$ 为 $AB$ 边上的动点．

- (1) 如图1，将 $\triangle ABC$ 对折，使得点 $B$ 的对应点 $B_1$ 落在对角线 $AC$ 上，折痕为 $CD$ ，求此刻点 $D$ 的坐标．

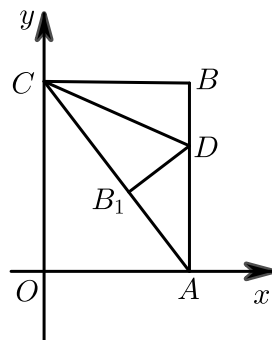


图1

- (2) 如图2，将 $\triangle ABC$ 对折，使得点 $A$ 与点 $C$ 重合，折痕交 $AB$ 于点 $D$ ，交 $AC$ 于点 $E$ ，求直线 $CD$ 的解析式．

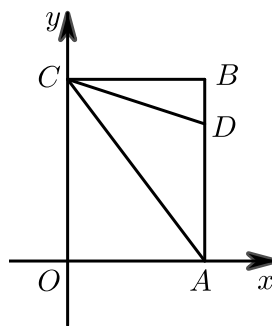
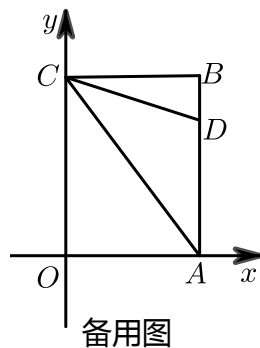


图2

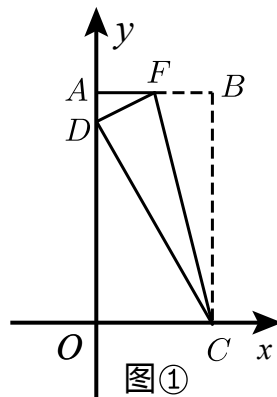
- (3) 在坐标平面内，是否存在点 $P$ （除点 $B$ 外），使得 $\triangle APC$ 与 $\triangle ABC$ 全等？若存在，请直接写出所有符合条件的点 $P$ 的坐标；若不存在，请说明理由．



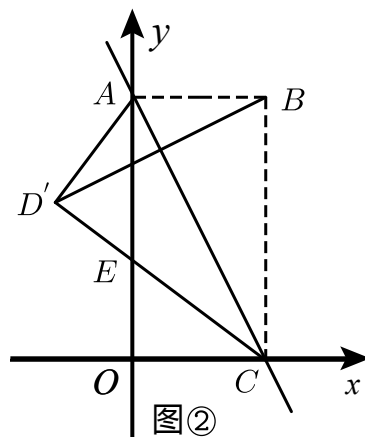
备用图

19. 在平面直角坐标系中，矩形 $OABC$ 的边 $OC$ 、 $OA$ 分别在 $x$ 轴、 $y$ 轴的正半轴上，点 $A$ 的坐标为 $(0, 8)$ ，点 $C$ 的坐标为 $(4, 0)$ 。

(1) 如图①，将矩形 $OABC$ 折叠，使点 $B$ 落在 $y$ 轴的点 $D$ 处，折痕为线段 $CF$ ，求点 $D$ 的坐标。



(2) 如图②，将矩形 $OABC$ 沿对角线 $AC$ 所在的直线折叠，点 $B$ 落在点 $D'$ 处， $CD'$ 与 $y$ 轴相交于点 $E$ ，求点 $E$ 的坐标。

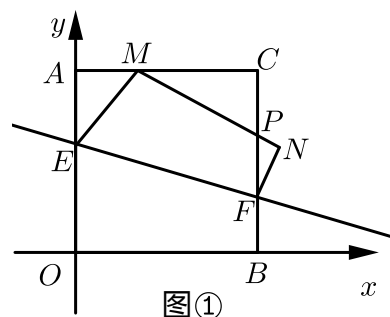


(3) 在(II)的情况下，若点 $P$ 是坐标平面内任意一点，点 $Q$ 是直线 $AC$ 上的一个动点，使以点 $E$ 、 $C$ 、 $P$ 、 $Q$ 为顶点的四边形是菱形，请直接写出满足条件的点 $P$ 的坐标。

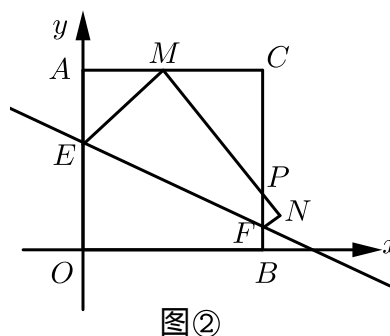
## 8. 定值问题

20. 将一个正方形纸片  $AOBC$  放置在平面直角坐标系中，点  $A(0, 4)$ ，点  $O(0, 0)$ ， $B(4, 0)$ ， $C(4, 4)$  点。动点  $E$  在边  $AO$  上，点  $F$  在边  $BC$  上，沿  $EF$  折叠该纸片，使点  $O$  的对应点  $M$  始终落在边  $AC$  上（点  $M$  不与  $A$ ， $C$  重合），点  $B$  落在点  $N$  处， $MN$  与  $BC$  交于点  $P$ 。

(1) 如图①，当  $\angle AEM = 30^\circ$  时，求点  $E$  的坐标。



(2) 如图②，当点  $M$  落在  $AC$  的中点时，求点  $E$  的坐标。



(3) 随着点  $M$  在  $AC$  边上位置的变化， $\triangle MPC$  的周长是否发生变化？如变化，简述理由；如不变，直接写出其值。